

# 代数几何

课程编号: B3I09372A

课程中文名称: 代数几何

课程英文名称: Algebraic Geometry

开课学期: 春季

学分/学时: 3/48

先修课程: 解析几何, 微分几何, 抽象代数 II

建议后续课程: 微分流形

适用专业/开课对象: 华罗庚数学班/1 年级本科生

团队负责人: 高鹏

责任教授: 高鹏

执笔人: 付保华

核准院长: 杨义川

## 一、课程的性质、目的和任务

代数几何是当代数学研究的一个核心领域。本课程的主要目的是讲解代数几何的一些基本概念与例子, 同时与其它诸多专业课(如抽象代数, 拓扑学等)结合起来。希望学生通过学习能够理解三次代数曲线上的群结构, 仿射代数簇, 希尔伯特零点定理, 代数簇之间的态射, 射影代数簇以及三次光滑代数曲面的直线构型。

在课程的教学过程中, 通过各个教学环节逐步培养学生的抽象思维能力, 逻辑推理能力, 让学生能够把之前相关课程的内容融会贯通并加以应用。让学生能够接触到前沿研究课题, 对当代核心数学有所了解。

本课程重点支持以下毕业要求指标点:

1.1 理解基本的代数几何概念, 并能够应用到具体的问题与例子中。

体现在理解仿射代数簇, 射影代数簇的基本概念以及例子, 理解代数簇之间的态射以及例子。理解代数簇所构成的范畴以及代数簇的光滑性。

1.2 理解代数几何中的一些基本定理并能够运用到例子中。

体现在理解希尔伯特零点定理及其在射影簇下的变形, 理解射影簇都是proper这一基本定理并运用到区分仿射与射影簇的问题中。理解三次光滑曲线上的群结构以及光滑三次曲面上的直线构型。

## 二、课程内容、基本要求及学时分配

1. 三次代数曲线 (12 学时)

理解平面二次曲线的分类以及该分类对于基域的依赖性, 理解实数域或复数域上的射影空间

及其上二次曲线的分类。重点理解这些概念对于基域的依赖性，尤其是对于是否代数闭的依赖性。理解三次平面曲线的光滑性以及判定法则。构造光滑三次曲线上的群结构，重点在于证明其结合律。在 Weierstrass 标准形下具体写出群的运算公式。

重点支持毕业要求指标点 1.1, 1.2。

## 2. 仿射代数簇 (20 学时)

回顾交换代数的基本知识 (有限生成代数, 理想, 极大理想, 素理想, 根理想, 希尔伯特基定理等等)。引入仿射代数簇以及 Zariski 拓扑, 重点讲解希尔伯特零点定理及其变形以及对于基域的依赖性。理解仿射代数簇构成的范畴与即约有限生成代数构成的范畴之间的等价性。讲解仿射代数簇之间的态射。引入基本开集并证明其构成 Zariski 拓扑的基。引入拟仿射代数簇及其间的态射。

重点支持毕业要求指标点 1.1, 1.2。

## 3. 射影代数簇 (16 学时)

讲解射影空间, 射影代数簇及其上的 Zariski 拓扑。介绍希尔伯特零点定理在射影簇上的变形。重点讲解所有射影簇都是 proper 定理的证明以及应用。引入切空间概念以及维数概念。对于超平面做具体的计算。引入三次光滑代数曲面并介绍其上直线的构型。

重点支持毕业要求指标点 1.1, 1.2。

# 三、教学方法

本课程采用课堂教学加习题课辅助的方法。本课程是纯理论, 需要有较多的抽象理解能力。本课程拟采用传统板书的教学方法, 以便学生能够及时理解。大力鼓励学生随堂提问, 课前课后讨论。随堂留练习题。每月有一次习题课, 主要是加深学生对于基本概念的理解以及对于基本定理的运用。随堂建议学生相关的课外书籍以及当前尚未解决的猜想, 激励学生深入学习的兴趣。鼓励学生相互之间的讨论。

# 四、课内外教学环节及基本要求

课外学习要求:

1. 做好课前预习, 预习时以教材为主, 了解相关的概念、定义、定理和定律。预习中认真思考, 以便带着问题更主动地听课。

2. 课后要复习, 复习时还应阅读参考教材, 对相关定理、重要的演算过程自主进行推导、消化。认真整理课堂听课笔记。

3. 要求学生课外自主学习, 学生课外阅读的参考资料以本大纲所列参考资料为主。

4. 认真完成所布置的作业，并主动进行文献检索整理，将知识点运用于实际。

## 五、考核方式及成绩评定

本课程成绩由期末考试采用百分制给出。考试采用闭卷形式，题型是由多个小问合成一个主题证明题。

## 六、教材和参考资料

[1] 《大学代数几何》，M. Reid 著，世界图书出版公司，2009 年印刷。131 页

[2] 《初等代数几何》，K. Hulek 著，高等教育出版社，2014 年印刷。224 页