

# 偏微分方程数值解法

课程代码：B3I09421A

课程名称：偏微分方程数值解法/ The Numerical Solution of Partial differential Equations

开课学期：1（秋）

学分/学时：4/64（48 学时课堂讲授+16 学时上机实践）

课程类型：专业必修

适用专业/开课对象：信息与计算科学和华罗庚数学班/四年级本科生

先修/后修课程：数值分析，偏微分方程，实变泛函基础，程序设计语言（MATLAB 或 C 语言）

开课单位：数学与系统科学学院

团队负责人：刘铁钢      责任教授：冯仁忠      执笔人：冯仁忠      核准院长：杨义川

---

## 一、课程的性质、目的与任务

本课程是信息与计算科学专业本科生的一门专业核心课程。本课程以解一阶和二阶线性偏微分方程为主，重点介绍有限差分法和有限体积法的工作原理及其相关概念，包括截断误差、稳定性和收敛性等概念，同时介绍变分法原理和有限元方法的工作过程及其误差分析。

通过本课程的学习，要求学生掌握当前求解偏微分方程的最常用的三种数值求解方法的原理及相关的概念，会应用所掌握的数值方法与技巧求解力学、物理和工程中的一些初边值问题，为进一步学习和开发更高级的偏微分方程数值解法打下基础。

本课程重点支持以下毕业要求指标点：

### 1.1 掌握求解偏微分方程的三种经典方法的基本原理，并能应用于具体的实例

体现在掌握理解求解一阶和二阶线性偏微分方程的有限差分法、有限体积法和有限元法的工作原理及其相关的概念，培养学生的偏微分方程求解算法设计素养，为四年级毕业设计做好准备

### 1.2 针对教师所选的力学、物理和工程中的一些初边值案例问题，利用所掌握的方法进行有效的算法设计并编程实现，培养学生解决科学与工程中的较复杂问题的能力与意识，为进一步学习和开发更高级的偏微分方程数值解法打下基础。

## 二、教学内容及教学基本要求

### 第一章 绪论（2 学时）

#### § 1.1 科学计算的巨大贡献

#### § 1.2 偏微分方程的概念及经典的偏微分方程

§ 1.3 偏微分方程的求解方法

§ 1.4 偏微分方程数值求解方法概述

§ 1.5 数值求解中的计算问题及误差来源

## 第二章 椭圆方程的有限差分解法（10 学时）

- **基本内容：**差分逼近的基本概念：截断误差、相容性条件、收敛性与稳定性；两点边值问题的差分求解：直接差分法、有限体积法、边界条件的处理；二阶椭圆方程的差分求解：矩形网格的五点差分格式、边值条件的处理、三角网格的差分格式；极值定理及先验估计、五点差分格式的敛速估计。
- **基本要求：**熟练掌握直接差分法和有限体积法构造差分格式的思想原理和边界条件的处理方法，了解相容性条件、收敛性与稳定性之间的关系，会推导矩形网、三角网上的一些差分格式，会用极值定理进行先验估计和五点差分格式的敛速估计。

§ 2.1 差分逼近的基本概念

§ 2.2 两点边值问题的差分解法

§ 2.2.1 直接差分法

§ 2.2.2 有限体积法

§ 2.2.3 边值条件的处理

§ 2.3 二阶椭圆方程边值问题的有限差分解法

§ 2.3.1 矩形网上的五点差分格式

§ 2.3.2 有限体积法

§ 2.3.2 边值条件的处理

\* § 2.3.3 极坐标形式的差分格式

§ 2.3.4 三角网上的差分格式

§ 2.4 极值原理及敛速估计

主要支持毕业要求指标点 1.1, 1.2

## 第三章 抛物方程的有限差分解法（10 学时）

- **基本内容：**介绍解热传导方程的古典差分格式的构造、截断误差的估计、稳定性概念及与收敛性的关系，介绍判别差分格式稳定性的矩阵法、Fourier 方法和一些代数准则。
- **基本要求：**熟练掌握求解一维热传导方程初边值问题的古典差分格式的构造、截断误差的估计及其稳定性概念，会用两种方法判定差分格式的稳定性条件，掌握判断稳定性的一些代数准则，会用能量估计法进行差分格式的稳定性分析。

§ 3.1 解一维热传导方程的经典差分格式

§ 3.2 稳定性与收敛性

§ 3.2.1 稳定性概念

§ 3.2.2 判别稳定性的矩阵法

§ 3.2.3 收敛性和收敛速度

§ 3.3 判别差分格式稳定性的 Fourier 方法

§ 3.4 判断差分格式稳定性的代数准则

主要支持毕业要求指标点 1.1, 1.2

#### 第四章双曲方程的有限差分解法 (8 学时)

- **基本内容:** 波动方程的差分逼近: 显格式、隐格式的构造, 稳定性分析, CFL 条件以及 CFL 条件的特征说明; 逼近一阶双曲型方程及方程组的迎风格式、Lax 格式、Box 格式、粘性差分格式、Lax-Wendroff 格式, 对流扩散方程的有限差分方法的稳定性分析。
- **基本要求:** 熟练掌握解一阶、二阶双曲型方程的常用差分格式并会分析其截断误差和稳定性, 了解为什么 CFL 条件是解双曲型方程的差分格式收敛和稳定的必要条件, 会运用以上方法推导解相应的双曲型方程组的差分格式, 掌握如何利用粘性差分格式求解双曲型方程, 会给出解对流扩散方程的差分格式并分析其稳定性, 从而会根据方程的性质选择不同的差分格式。

§ 4.1 波动方程的差分逼近

§ 4.1.1 波动方程及特征

§ 4.1.2 显格式

§ 4.1.3 稳定性分析

§ 4.1.4 隐格式

§ \* 4.2 一阶线性双曲型方程组

§ 4.2.1 双曲型方程组、特征概念

§ 4.2.2 Cauchy 问题、依存域、影响域、决定域

§ 4.2.3 其它定解问题

§ 4.3 一阶双曲方程及方程组的差分逼近

§ 4.3.1 迎风格式

§ 4.3.2 积分守恒差分格式

§ 4.3.3 粘性差分格式

注：带\*是规定学时之外的补充内容，可根据学时情况进行选讲。

主要支持毕业要求指标点 1.1, 1.2

### 第五章变分原理（8 学时）

- **基本内容：**二次函数的极值、两点边值问题的变分原理、本质和自然边值条件；二阶椭圆边值问题的变分原理、本质和自然边值条件；Ritz-Galerkin 方法及其误差估计。
- **基本要求：**会将边值问题转化为等价的变分形式，会用 Ritz-Galerkin 方法求两种变分形式的近似解并能给出近似解的误差估计。

§ 5.1 二次函数的极值

§ 5.2 两点边值问题的变分原理-极小位能原理和虚功原理及等价性证明

§ 5.3 二阶椭圆边值问题的变分原理及等价性证明

§ 5.4 Ritz-Galerkin 方法及误差分析

主要支持毕业要求指标点 1.1

### 第四章 椭圆型方程的有限元方法（10 学时）

- **基本内容：**一维线性元（基于 Ritz 法和 Galerkin 法形成有限元方程）、线性元误差估计、\*Nitsche 技巧；一维高次元、二维矩形元、三角元；有限元的形成、积分计算、边值条件的处理；\*线性三角元收敛阶的估计。
- **基本要求：**掌握有限元数值求解微分方程的思想和步骤，会构造单元上的低次、高次形状函数，会根据单元形状函数构造试探函数空间的基函数，形成有限元方程，掌握对线性元的收敛阶估计方法及边值条件的处理方法。

§ 6.1 两点边值问题的有限元方法

§ 6.1.1 一维线性元（基于 Ritz 法和 Galerkin 法形成有限元方程）

§ 6.1.2 线性元误差估计，Nitsche 技巧

§ 6.1.3 一维高次元

§ 6.2 二维元

§ 6.2.1 二维矩形元（包括双一次-三次 Lagrange 元、双三次 Hermite 元）

§ 6.2.2 三角形元（面积坐标及有关公式，Lagrange 型元，Hermite 型元）

§ 6.3 有限元方程的形成、积分计算、边值条件的处理

§ 6.4 线性三角元收敛阶的估计

主要支持毕业要求指标点1.1, 1.2

注：以上内容为课堂讲授内容，上机实践作业由课程组单独设定并在 16 学时上机课上完成；

带\*是规定学时之外的补充内容，可根据学时情况进行选讲。

### 三、教学方法

偏微方程数值解法是在离散空间中考虑偏微分方程的求解问题，与传统的连续函数空间中的求解无论在思想还是方法上都有很大不同，具体表现在学习方法不易把握，专业性更强，与实践结合紧密，知识面跨度更大，需要广博的基础理论知识。在大规模压缩教学课时的情况下，我们合理地选择教学内容，突出重点，以点带面，应用启发式教学，培养学生的自主探究能力，以多媒体技术辅助教学，增添课程的趣味性与实用性，以科研促进教学，培养学生的创新能力。

重点支持毕业要求指标点1.1,1.2。

### 四、教学安排及方式

除了课堂理论教学外，还要求学生必须认真完成任课教师布置的课后作业（一般每节课 3-5 题）并按时上交，在此基础上自主完成教材中每节的课后习题与每章的课外实验题。自主学习教师布置的研讨内容，积极参与小组讨论、小组汇报等活动。

重点支持毕业要求指标点 1.1, 1.2。

### 五、考核内容及方式

本课程成绩由平时成绩、上机实验报告和期末考试组合而成，采用百分计分制。各部分所占比例如下：

平时成绩占15%，主要考查各章知识点的理解程度，学习态度，自主学习能力，利用现代工具获取所需信息和综合整理能力，课堂讨论时的沟通和表达能力。包括考勤考纪，平时作业，重点支持毕业要求指标点1.1。

上机实验报告占15%，主要考查学生对求解算法及其理论知识的运用能力，培养解决学科与工程中的实际问题的能力，重点支持毕业要求指标点1.1、1.2。

期末成绩占70%，采用考试的考核方式。考试采用闭卷形式，题型为填空题、判断题、选择题、计算题、证明题等。重点支持毕业要求指标点1.1、1.2。

### 六、建议教材及参考资料

建议教材：

[1]《偏微分方程数值解法》（第二版），李荣华著，高等教育出版社，2010年

参考教材：

[1]《偏微分方程数值解》（第二版），K.W.Morton and D.F.Mayers 著，李治平门大力许现民张

[2] 《偏微分方程数值解法》(第二版), 陆金甫, 关治著, 清华大学出版社, 2004 年  
硕译, 人民邮电出版社, 2006 年

[3] 《微分方程数值解法》, 胡健伟、汤怀民著, 科学出版社, 2003 年