

最优化理论与算法

课程编号：B3I09331A

课程中文名称：最优化理论与算法

课程英文名称： Optimization Theory and Methods

开课学期：秋季

学分/学时： 3/48

先修课程：微积分、线性代数、高级编程语言

建议后续课程：数学建模、偏微分方程数值解

适用专业/开课对象：计算数学和应用数学专业（计算数学方向），三年级本科生

团队负责人：刘铁钢 责任教授：刘红英 执笔人：刘红英 核准院长：杨义川

一、课程的性质、目的和任务

线性与非线性规划是计算数学与运筹学的交叉学科，主要从理论、数值方法和计算三个方面研究函数极值问题，在国防、经济、金融、工程和管理等许多领域有着广泛的应用。许多其他科学领域的问题也可归结为线性或者非线性规划问题，如二人零和博弈的平衡点和数据包络分析中对决策单元的评价可归结为线性规划、信息科学中的模式识别问题和生命科学中的蛋白质折叠问题可归结为非线性规划。

最优化理论与方法课程是为信息与计算专业(计算方向)开设，并向华罗庚班与高工工程学院等研究型人才开放。该课程讲授的基本模型、基本概念、基本理论和基本方法是一个从事计算、工程与管理相关领域的从业人员及高级研究人员所必备的。各种结论和方法的基本思想和分析技巧是计算数学学科素养的重要组成部分。

该课程主要内容包括线性规划基础及扩展、非线性规划的基本理论与算法、部分应用和最新进展。通过本课程的理论学习，将使学生系统掌握线性与非线性规划的基本理论和方法；通过本课程的平时作业和实践环节培养学生运用优化模型和方法解决实际问题的意识和能力，积累相关的数值技巧和经验。

本课程重点支持以下毕业要求指标点：

1.1 系统掌握线性与非线性规划的基本理论和方法。对基本结论和方法的思想和分析技巧有自己的理解和思考。

1.2 运用优化模型和方法解决实际问题的意识和能力，积累相关的数值技巧和经验。

二、课程内容、基本要求及学时分配

该课程是面向应用的理论专业课，采用“理论+实践环节”的模式分成三个模块进行教学。具体的课程内容、基本要求及学时分配如下：

模块1 线性规划(约 16 课时)

1.1 基本理论与方法(10 课时)，包括基本定理；单纯形法及启动、退化与循环、单纯形法的有效性；矩阵表示及修正单纯形法；对偶问题、对偶定理、互补松弛定理。

1.2 扩展 I：网络流及其应用(约 4 课时)，包括图的基本概念；网络流问题及网络单纯形法；最大流问题、指派问题、最短路径问题、最小生成树问题。

1.3 扩展 II：线性整数规划(约 2 课时)，包括整数规划的表述技巧及典型问题及分枝定界法。

基本要求：掌握线性规划基本定理、单纯形法的基本思想及计算步骤、线性规划的对偶理论与对偶单纯形法、网络流问题的特点及在其网络单纯形法中的体现、整性定理及其应用、整数线性规划问题与线性规划松弛问题的关系、一些基本的整数规划建模技巧及分支定界法；理解单纯形法的有限收敛性、退化问题及单纯形法可能循环及典型的反循环措施、网络流问题的一般性描述与特定应用的描述异同；了解凸集和极点等基本概念、线性规划的发展简史、单纯形法的计算复杂度及求解线性规划的内点法、最大流最小割定理并能用线性规划的对偶理论解释、一些典型应用问题的整数规划模型；掌握一些将典型的非线性规划问题转化成线性规划的建模技巧，具备利用单纯形法的计算结果进行灵敏度分析的综合能力。初步培养学生将一般化模型和方法具体化后，开发特殊应用问题的特点设计算法的意识和能力。初步让学生体会线性规划的理论和方法对于最优化应用的基础性和重要性。

主要支持毕业要求指标点 1.1, 1.2.

模块2 非线性规划：无约束优化(约 14 课时)

2.1 基础(4 课时)，包括最优性条件、凸函数及其判别、一维搜索方法。

2.2 线搜索法(10 课时)，包括最速下降法、牛顿法、共轭梯度法、拟牛顿法、非线性最小二乘和信赖域法。

基本要求：掌握无约束极值的最优性条件及基本思想和分析技巧；理解各种方法的原理、性质及优缺点，特别是最速下降法的线性收敛性、牛顿法的局部二阶收敛性、共轭梯度法仅需要矩阵向量乘及二次终止性、拟牛顿法中利用梯度近似海森阵的思想、信赖域法的基本思想。了解非精确线搜索的思想、Armijo 条件和 Wolfe 准则、梯度法推广后可得到梯度投影法和次梯度法、用牛顿法求解最小二乘问题时，开发问题的结构可以设计出专用高效的高斯牛顿法、了解信赖域子

问题的精确解法和近似解法。培养学生对算法进行感知和初步分析的能力，意识到各种算法在收敛速度和计算开销之间的差异，并体会各自的优缺点及应用场景。

主要支持毕业要求指标点 1.1, 1.2.

模块3 非线性规划：约束优化(约 16 课时)

3.1 理论(8 课时)，包括一阶必要条件 (KKT 条件)和二阶条件、拉格朗日对偶、半定规划简介。

3.2 线性约束规划(3 课时)，包括解等式约束问题的消元法和一般问题的积极集法。

3.3 非线性约束规划(5 课时)，包括罚函数法(如 Courant 罚函数、障碍函数、乘子罚函数和 l_1 罚函数)和逐步二次规划法。

基本要求：掌握约束优化的最优性条件和对偶理论、非线性约束规划的逐步二次规划法的基本思想；理解最优性条件和对偶理论的基本思想和分析技巧、线性等式约束二次规划问题的消元法和一般二次规划的积极集法的基本思想、非线性规划的序列无约束极小化技巧和思想；了解半定规划模型及其应用和障碍函数法。本模块内容是前面两个模块的提升和应用，培养学生归纳猜想的数学思维能力、体会用一系列简单问题逼近复杂问题的数学思想及对更复杂问题进行分析的能力。

主要支持毕业要求指标点 1.1, 1.2.

三、教学方法

该课程最大的特点是综合性强。它需要分析、代数、几何和计算等数学领域的基本知识。具体地，需要线性向量空间和线性方程组解的基本性质分析线性规划的解的性质；需要微积分中多元函数的梯度、方向导数、Taylor 展式和泛函分析中的凸集分离定理研究一般数学规划的最优性条件；还需要针对各种最优化模型基于逼近思想设计各种有效算法，并分析算法的收敛性和收敛速度。其次，该课程还具有应用广泛的特点。

基于上述特点，该课程采用“理论加实践环节”的教学模式。理论环节的教学方法即课前布置预习内容及预设问题，课堂讨论讲解、课后完成计算或者分析类的习题。实践环节由老师给出详细的指导文件，学生课后完成。实践环节简介见第四部分。此外，该课程为学有余力的同学推荐了课外阅读材料。

四、课内外教学环节及基本要求

鉴于第三部分该课程的特点及所采用的教学方法，该课程共 48 课时的理论课及课外的实践环节。具体的，每周 3 个课时的理论课，辅以课前的预设问题和课后习题。另有课外阅读及如下的实践环节。

实践环节内容简介：

- (1) 学习并使用优化软件：要求会使用 Matlab 中的优化工具箱，专业优化软件 Lingo 和 Cplex，具体要求会选择算法、会设置参数、并对计算结果能够进行简单的解释。
- (2) 编写部分重要算法的程序，观察算法的行为和性能。
- (3) 完成两个无约束优化的数值实验。
- (4) 撰写课程小论文：要求学生寻找自己感兴趣的相关应用，撰写一篇小论文，要求给出问题的背景、数学描述、解决方法和结果。

其中(1)是必选的，(2)，(3)和(4)中任选一个，按具体的要求完成实践报告。环节(1)安排在开学前五周；环节(2)，(3)和(4)安排在期中考试后，期末考试前。

主要支持毕业要求指标点 1.2.

五、考核方式及成绩评定

本课程的考核采用过程性评价与终结性评价相结合的方法评定成绩，其中平时考查(包括到课情况、课堂互动和平时作业)10%、实践环节 20%、期中考试 40%、期末考试 30%。期中考试和期末考试分别为 110 分钟的闭卷考试，期中考试内容为模块 1 和模块 2；期末考试内容为模块 3。

六、教材和参考资料

建议教材：

- [1] 刘红英，夏勇，周水生，数学规划基础。北京航空航天大学出版社，2012.10。
- [2] 陈宝林，最优化理论与算法。清华大学出版社，第 2 版，2005.1。

参考资料：

- [1] 袁亚湘，非线性规划的计算方法。科学出版社，2008.2.
- [2] R. Fletcher, Practical Methods of Optimization, John Wiley & Sons: New York, second ed., 1987.
- [3] J. Nocedal, S. J. Wright, Numerical Optimization, Springer: New York, second ed., 2005.
- [4] 刘红英，《最优化理论与算法》实践环节的说明。