# EXERCISE TWO

*4/18*课堂交。 注(***)部分是选做.

1. 设$f : V \to V$是线性空间上的线性变换。
   (a) 说明$f$一一对应与$V$上的$(1,1)$型张量;
   (b) 给出$(1,1)$型张量的基变换公式和坐标变换公式;
   (c) 证明:Kroneck符号$\delta_i^j$是一个$(1,1)$型张量的坐标表示.给出这个张量。
2. 证明:
   (a) $T\mathbb{R}^n$微分同胚与$\mathbb{R}^{2n}$.
   (b) 若$f : M \to N$是光滑映射,证明:$F^* : T^*N \to T^*M$是光滑映射。
3. (F-相关向量场)
   (a) 给定$F : R \to R^2, F(t) = (\cos t, \sin t)$,证明$\frac{d}{dt}$对应的F-相关向量场是$Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$.
   (b) 给定$F : R \to R, F(t) = t^2$,证明$\frac{d}{dt}$不存在F-相关向量场。
   (c) *** 如果$F$是光滑同胚,则任一向量场存在唯一F-相关向量场.
4. (Lie Bracket) 给定$\mathbb{R}^3$上的向量场$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, W = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, U = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$，计算$[V,W], [W,U], [U,V]$,并验证Jacobi恒等式。
5. 给定以下$f : M \to R$，计算$df$，确定满足$df_p = 0$的点集。
   (a) $M = \{(x,y) \in R^2 : x > 0\}; f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.使用标准坐标卡。
   (b) $M = R^n; f(x) = |x|^2$.使用标准坐标卡。
   (c) $M = S^2, f(p) = z(p)$,$p$是球面上的点，$z(p)$为其$z$坐标.使用球极投影坐标。
6. (李导数)证明:
   (a) $\mathcal{L}_V[W,X] = [\mathcal{L}_V W, X] + [W, \mathcal{L}_V X]$
   (b) $\mathcal{L}_{[V,W]}X = \mathcal{L}_V\mathcal{L}_W X - \mathcal{L}_W\mathcal{L}_V X$
   (c) $\mathcal{L}_V(fW) = (Vf)W + f\mathcal{L}_V W$
7. 设$n$维光滑流形$M$有单一的全局坐标卡。证明:
   (a) 任意给定$n^3$个光滑函数$\Gamma_{ij}^k$可以构造一个仿射联络。
   (b) 给出$\Gamma_{ij}^k$在基变换下的变换公式。说明$\Gamma_{ij}^k$不是张量。
8. 将李导数看作映射$\mathcal{L} : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$。 证明李导数不是一个张量，也不是一个联络。

   特别当联络是对称时($\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$), 有$\mathcal{L}_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

9. 利用度量$g$给出的切空间和余切空间的对应，给出任一光滑函数$f$的微分$df$对应的切向量场$gradf$。写出其局部坐标表示和基变换下的变换公式。特别给出其在欧几里德空间标准度量下的表示。

10. 设$\nabla$是$(M,g)$上黎曼联络，$r$为其上一个光滑曲线，证明:

    (a) 证明：任意个沿$r$的平行向量场如果在一点线性无关，则在$r$上所有点线性无关。(平行保线性)

    (b) $V, W$是沿$r$的平行向量场，证明$\langle V, W\rangle_g$沿$r$为常数。

    (c) 沿$r$平行移动$P_{ab} : T_{r(a)}M \to T_{r(b)}M$给出一个切空间的等距变换。