

偏微分方程

课程编号: B3I09332A

课程中文名称: 偏微分方程

课程英文名称: A Introduce of Partial Differential Equation

开课学期: 春

学分/学时: 3/48

先修课程: 数学分析、高等代数、解析几何、实变函数、复变函数、近世代数、常微分方程、数值分析

建议后续课程: 应用偏微分方程、偏微分方程现代理论、偏微分方程数值解、数学建模、控制论

适用专业/开课对象: 数学、应用数学、信息与计算科学专业(方向), 三年级本科生

团队负责人: 郭定辉 责任教授: 郭定辉 执笔人: 郭定辉 核准院长: 杨义川

一、课程的性质、目的和任务

偏微分方程是描述社会、自然规律随时间、环境变化规律的等式, 而偏微分方程理论主要是研究基础数学理论在数学本身、工程和科学研究领域中所遇到的偏微分方程的应用。由此可见, 偏微分方程是数学和科学技术之间的桥梁, 科学技术人员可以利用其描述社会或自然现象, 通过偏微分方程模型进行科学实验、实际工程模拟、设计等, 而数学家可以运用数学知识帮助讨论偏微分方程性质, 为科学技术人员服务。

通过对偏微分方程课程的学习, 希望提高学生运用数学知识来解决一些实际科学和工程中的简单偏微分方程问题的能力, 以便学生能够在毕业以后更快地适应所从事的工作。因此, 该课程应该在数学系各专业定为必修课, 而且可以在工程学科中广泛开课。

本课程重点支持以下毕业要求指标点:

- 1.1 掌握经典偏微分方程模型的建立、分类和化简, 掌握波动方程、热传导方程、调和方程等三个方程模型的求解方法以及其适定性判断, 为后续专业课程的学习打下坚实的基础;
- 1.2 了解现代偏微分方程的基本思想和方法及发展趋势, 了解偏微分方程理论和方法在解决应用学科中的实际问题时的具体应用方法和前景;
- 1.3 提供综合运用偏微分方程知识开展科研实践和解决具体问题的能力, 运用现代信息检索、资料查询获取相关信息的能力, 撰写偏微分方程科研论文的能力。

二、课程内容、基本要求及学时分配

本课程主要介绍一阶偏微分方程和三类典型的二阶线性偏微分方程（或称为数学物理方程），即，波动方程、热传导方程、调和方程。包括典型偏微分方程的导出，各种定解问题的提法，各种定解问题的求解方法，如分离变量法、积分变换方法、Green 函数法等。此外，本课程还研究典型偏微分方程的各种定解问题的解的性质，例如，各种定解问题的适定性。为了对偏微分方程有系统的认识，本课程还要研究一般偏微分方程的一些基本原理，比如 Cauchy-Kovalevskaja 定理和特征理论、线性偏微分方程的叠加原理、发展方程的齐次化原理、二阶偏微分方程的分类等。教学内容和学时分配情况如下。

第一章 偏微分方程绪论(8 学时)

1.1 三类经典偏微分方程的导出

1.1.1 波动方程的导出以及波动方程的定解条件

1.1.2 热传导方程的导出以及热传导方程的定解条件

1.1.3 Poisson 方程及其定解条件

1.2 偏微分方程的基本概念

1.2.1 偏微分方程的基本类型

1.2.2 偏微分方程的定解问题

1.2.3 二阶线性偏微分方程的分类

1.3 线性偏微分方程解的叠加原理与齐次化原理

1.3.1 线性偏微分方程解的叠加原理

1.3.2 线性偏微分方程解的齐次化原理

基本要求：

- 1) 了解弦振动方程、热传导方程和 Poisson 方程的推导与定解条件确定；
- 2) 熟悉初值问题、边值问题、混合问题的提法以及适定性(存在性，唯一性和连续依赖性)；
- 3) 掌握偏微分方程的解、阶、线性与非线性、齐次与非齐次等基本概念；
- 4) 掌握偏微分方程的分类方法和偏微分方程主要类型；
- 5) 掌握线性偏微分方程解的叠加原理与齐次化原理，会求解非齐次边界问题；
- 6) 熟练掌握 Schwartz 多重指标表示方法以及偏微分方程解决的问题。

主要支持毕业要求指标点1.1。

第二章 一阶偏微分方程(8 学时)

2.1 拟线性一阶偏微分方程的 Cauchy 问题

2.2 完全非线性一阶偏微分方程的 Cauchy 问题

2.3 Cauchy-Kovalevskaja 定理和特征理论

基本要求

- 1) 掌握一阶方程的求解方法,
- 2) 了解特征理论
- 3) 掌握一阶方程的级数求解方法。

主要支持毕业要求指标点1.1和1.2。

第三章 二阶典型线性偏微分方程的级数与积分变换法 (12 学时)

3.1 Fourier 变换在求解偏微分方程中的应用

3.2 分离变量法及其应用

3.2.1 有界弦的自由振动

3.2.2 有界弦的强迫振动

3.2.3 有界细杆的热传导方程

3.2.4 矩形薄板的热传导方程

3.2.5 分离变量法求解调和方程定解问题

3.3 Laplace 变换及其应用

基本要求:

- 1) 熟练掌握关于初值问题的 Fourier 变换方法;
- 2) 熟练掌握关于边值问题的分离变量法;
- 3) 掌握关于圆域等特殊区域上的高维偏微分方程问题的 Fourier 变换方法和分离变量法;
- 4) 熟练掌握 Laplace 变换求解偏微分方程定解问题。

主要支持毕业要求指标点1.1和1.2。

第四章 求解偏微分方程的经典方法(14 学时)

4.1 一维常系数双曲方程的行波解

4.1.1 齐次问题的通解和特解

4.1.2 行波解的性质

4.1.3 非齐次方程问题的解

4.1.4 半无界弦的自由振动

4.2 高维波动方程的 Cauchy 问题

4.2.1 高维波动方程

4.2.2 降维法

4.2.3 高维波动方程解的依赖区域、决定区域和影响区域

4.2.4 Huygens 原理及波的弥散现象

4.3 线性偏微分方程的基本解及其应用

4.3.1 关于线性偏微分方程的基本解

4.3.2 椭圆型偏微分方程的基本解方法-Green 函数法

4.3.3 特殊区域上的 Green 函数偏微分方程的基本解方法

4.3.4 典型偏微分方程的基本解方法

基本要求:

- 1) 熟练掌握无界弦自由振动问题的 D'Alembert 解法, 知道 D'Alembert 解的物理意义;
- 2) 掌握高维波动方程的初值问题的解法及波的传播方式;
- 3) 了解广义解、基本解的定义, 掌握调和函数的性质, 熟练掌握格林函数及其性质;
- 4) 能利用基本解方法求解典型区域上的典型偏微分方程问题。

主要支持毕业要求指标点1.1和1.2。

第五章 偏微分方程解的唯一性和稳定性(6 学时)

5.1 波动方程的能量不等式以及定解问题解的唯一性和稳定性

5.1.1 波动方程的 Cauchy 问题的唯一性和稳定性

5.1.2 波动方程的混合问题的唯一性和稳定性

5.2 抛物型偏微分方程的极值原理及其应用

5.2.1 热传导方程的极值原理

5.2.2 二阶线性抛物型方程 Cauchy 问题解的唯一性和稳定性。

5.3 二阶椭圆型偏微分方程解的极值原理及其唯一性和稳定性

基本要求:

- 1) 掌握波动方程问题的能量表达式和能量不等式, 并用其确定波动方程解的唯一性和稳定性;
- 2) 掌握热传导方程解的极值原理, 并利用及确定热传导方程的唯一性和稳定性;
- 3) 掌握调和方程解的弱极值原理和强极值原理, 以及在证明方程的唯一性和稳定性方面的应用。

主要支持毕业要求指标点1.1和1.2。

三、课内外教学环节及基本要求

- (1) 本课程以课堂教学为主, 课外扩展学习为辅的教学方法。在课堂上采用 PPT 等现代教

学手段、以讲授为主。同时，本课程在讲课中也要求学生积极参与课堂例题解答。

重点支持毕业要求指标点 1.1 和 1.2.

(2) 大学期间的偏微分方程课程遇到偏微分方程虽然比较少，但可以构成的偏微分方程模式灵活多变。从而，导致一个方程需要不同的求解和分析方法进行讨论。因此，需要学生通过做大量的习题来掌握各类方程的求解和分析方法。此外，通过物理、力学等应用学科中具体的波动方程、热传导方程、调和方程实例，让学生掌握关于偏微分方程问题的建立、求解和分析的方法，为今后的学习打下理论基础

重点支持毕业要求指标点 1.1 和 1.2.

(3) 引导学生在课堂外阅读偏微分方程方面的课外读物，拓展学生的视野，提高学生的自主学习的能力。通过文献阅读、课外调研等过程，充分理解课堂中讲授的基本概念与本学科在其它学科中所起的作用。使得学生们充分了本学科的前沿热点，将所学基础知识应用于解决一些前言热点问题。

重点支持毕业要求指标点 1.3。

四、考核方式及成绩评定

(1) 本课程平时作业（按交作业次数、质量）、出勤率（按点名次数）作为平时成绩，占 20%。主要考查各章知识点的理解程度，学习态度，自主学习能力，包括考勤考纪，平时作业等。

重点支持毕业要求指标点1.1、1.2。

(2) 要求学生根据所阅读的课外书籍完成课程论文，按文章格式是否合格、内容是否自创是否系统完整等，来评价成绩，在课程总成绩中占 30%。主要考察学生课外学习情况，培养学生查阅资料、确定研究方向和具体问题、撰写学术论或科研报告的能力。

重点支持毕业要求指标点1.3。

(3) 期末闭卷考试成绩，占50%。采用闭卷形式，题型为填空题、计算题、证明题等。

重点支持毕业要求指标点1.1、1.2。

五、教材和参考资料

教材：

1. 郇中丹、黄海洋，《偏微分方程》，高等教育出版社，北京，2011 年
2. 郭定辉，《微分方程基础（下）》，高等教育出版社出版，北京，2016 年

参考资料：

1. 姜礼尚、陈亚浙,《数学物理方程讲义》,高等教育出版社,北京,2003 年
2. 陈祖墀,《偏微分方程》,高等教育出版社,北京,2005 年
3. 朱长江等,《偏微分方程教程》,科学出版社,北京,2005 年