

数理逻辑与集合论

课程编号：B3I09242A

课程中文名称：数理逻辑与集合论

课程英文名称：Mathematical logic and Set theory

开课学期：春季

学分/学时：3/48

先修课程：抽象代数

建议后续课程：组合与图论、理论计算机科学

适用专业/开课对象：数学与应用数学、信息与计算、信息安全/ 二年级本科生

团队负责人：高鹏 责任教授：王拥军 执笔人：王拥军 核准院长：杨义川

一、课程的性质、目的和任务

《数理逻辑与集合论》是一门围绕数学形式系统展开的、抽象程度很高的学科。教学内容总要涉及抽象概念和形式推演，课程的核心是学习公理化方法、可构造性方法和内涵外延方法。

通过本课程的学习，使学生能较系统地掌握命题演算、谓词演算、公理化的数学系统、集合与悖论、序数与基数等方面的基本概念、基本理论和基本演算与推理技能。

《数理逻辑与集合论》是计算机、信息、哲学、数学等专业本科生的核心课，其思想、概念、方法、理论和成果广泛地覆盖到相关专业的各个领域，该课程不仅为学生学习后续课程和参与工作科研打下良好的基础，而且对培养学生的抽象表达能力、形式推演能力和缜密概括能力，进而提高分析问题和解决问题的能力将起到不可或缺的作用。

通过本课程的学习，加强学生在数学和计算科学基础方面的理解，提高学生表示和推理数学概念和符号的能力。

本课程重点支持以下毕业要求指标点：

1) 掌握扎实的数学理论知识。

掌握形式系统内概念表达、逻辑推理的基本知识，并能应用于建立和理解各种具体的数学理论架构，正确体会形式系统与其模型之间的关系；

体现在掌握抽象的数学系统所必需的逻辑基础，具有从符号和公理角度把握某一数学研究领域的本领。以此为新视角，重新梳理以往学过的课程，诸如抽象代数里的群与本课程里给出的形式群之间的关系，抽象出不同学科之间的共性等等。继而以形式化、公理化思想指导后续专业课

程的理解，进一步加深对数学知识表达和推理的认识。

2) 了解数学基础研究及其相关应用领域的前沿及发展趋势。

逻辑还有经验的一面，现实世界中的逻辑恰恰是与不同研究领域的具体特点有关的。

逻辑是研究如何管理推理规则的科学。经典意义下的逻辑规律在微观世界中会有所不同，比如量子力学中的叠加原理会导致分配率的失败；计算机科学中使用的直觉主义观点是不承认排中律的。学生应当具有针对不同研究领域特点探究合适推理系统的意识和能力，能够对一些常见的问题（比如模糊现象）进行分析和处理。

3) 了解数学对其它学科的影响及应用。

“无限”概念的正确认识。

建立严格的数学分析理论是以实数理论为基础的，而建立严格的实数理论又必须以集合论为基础，集合论的本质是“实无限”的。和直觉密切相关的是“潜无限”，结合三次数学史上的危机正确理解这些“无限”概念。

二、课程内容、基本要求及学时分配

1. 命题演算和谓词演算(14课内学时)

理解命题（断言）的概念；逻辑连接词和真值函数；复合命题的真值表；逻辑连接词的极小完备性；论证的有效性；析取范式与合取范式；重言式与矛盾式；命题演算的三个公理模式；分离规则；证明和定理；命题演算的演绎定理；命题演算的可靠性定理；命题演算的完备性定理；自由变元与约束变元（量词的引入）；项与合式公式；自由代换；斯科伦函数；普遍有效性；谓词演算的六个公理模式；推广规则；谓词演算的演绎定理；谓词演算的可靠性定理；谓词演算的完备性定理；可满足性、赋值、解释和模型。

主要支持毕业要求指标点 1）。

2. 数学系统和哥德尔不完全性定理(10课内学时)

逻辑公理与数学公理；等词公理与数学系统；群公理与形式群系统（讨论抽象代数里的群概念，考察二者的差别）；一阶算术形式系统（考察其与皮亚诺算术的差别）；哥德尔编号（形式符号的自然数编码，实质是名与实）；递归函数（形式系统中的可表达性）；对角线原理；哥德尔不完全性定理的证明思路（核心是自指代语句的引入），这一部分结果对很多学科都有重大的指导意义。

主要支持毕业要求指标点 1）、2）、3）。

3. 非经典逻辑(8课内学时)

经典逻辑的逻辑规律，诸如“与”“或”之间的分配律、非运算的对合律、非矛盾律、排中

律等等；刻画微观世界的量子逻辑，分析非、“或”连接词的不寻常，指出分配律的不满足；直觉主义逻辑，非运算的对合律不满足，指出实质是排中律的缺失；理解推理规范与客观世界的关系，破除逻辑认识的神秘性。

主要支持毕业要求指标点 2)、3)。

4. 朴素集合论及公理化(8课内学时)

朴素的集合概念(内涵公理和外延公理)；集合间的关系和特殊集合；关系、逆、复合、闭包；等价关系和划分；相容关系和覆盖；偏序、线序、良基、良序；函数、开集和闭集；模糊子集；罗素悖论；公理集合论简介(有限分离模式、并集公理、幂集公理、无限公理、替换公理、基础公理、选择公理)；一阶形式集论；Cantor 定理。

主要支持毕业要求指标点 1)、2)、3)。

5. 序数和基数(8课内学时)

自然数集合；实数集合；集合间的等势映射；序数及其性质；集合的基数；基数的运算(加、乘和指数运算)；连续统假设；共尾数；集论的形式语言和相对无矛盾性。

主要支持毕业要求指标点 1)、2)。

三、教学方法

在这种抽象性很高的课程教学过程中，应当采用“**教师讲实例突出直觉、学生多角度积极参与**”教学思想，借助现代化信息平台实现教学开放式互动，即基于问题的教学、基于项目的学习、专题讨论、文献阅读等教学方法实现。具体方法如下：

1. 精选教学典型实例 针对本课程高度抽象化特点，诸如抽象的逻辑概念、形式的符号推演等对不少学生有“当头一闷棍”的感觉，我们提出了“构造-设计课程用例”的教学新思路。即从学生熟悉的数学、信息学科中，师生交互协作，精选典型实例，改革既往课程公理化教学思路，力图做到把“抽象内容”具体化、通俗化。

2. 多角度激励学生主动参与 探索传统考试成绩之外的激励模式，例如和学生一起讨论本课程鲜活的发展历史，以了解抽象原理的背后动因；学生参与教师研究领域与本课程相关的开放式小课题，并撰写科研小论文等等。主要任务就是摸索出种种有效的课程学习激励模式。

3. 建网上课堂交互平台 将设立常见问题、学科历史、开放小课题、资料共享、老师在线和火花论坛等六个部分。这部分工作主导思想是利用现代信息技术大大拓展传统课堂的时空维度，让传统科学插上现代技术之翼，提高教师团体与学生群体的交互契合度，搭建虚拟的抽象思维教学训练平台。

四、课内外教学环节及基本要求

本课程的教学安排包括理论教学、课堂讨论、在线交互等，每周授课 3 学时，含 3 次不同题目的课堂讨论，10 次作业和一次研讨小论文。

本课程涉及数理逻辑（32 学时，两次讨论）和集合论（16 学时，一次讨论）两部分内容，全部介绍不可能也不必要。针对其自身特点和整个课程体系的约束，教学点围绕数学形式系统展开。首先介绍数学形式系统的核心---命题演算和谓词演算，讨论了形式系统的构成和整体性质；然后给出数学系统的定义，具体介绍一阶形式算术系统和集合论形式系统（**第一次讨论题目**：形式群的模型一定是群吗？）；随后一方面以哥德尔不完全性定理的简要证明为线索，讨论了包含算术的形式系统的局限性（**第二次讨论题目**：对角线原理的妙用？）；另一方面，在力图保证集合概念无矛盾的前提下，学习序数和基数概念，并最终介绍选择公理，这一部分隐含实无限观点（**第三次讨论题目**：悖论与数学史上的三次危机）。

五、考核方式及成绩评定

本课程成绩由平时和期末考试组合而成，采用百分计分制。各部分所占比例如下：

平时成绩占 20%，主要考查各章知识点的理解程度，学习态度，自主学习能力，利用现代工具获取所需信息和综合整理能力，课堂讨论时的沟通和表达能力。包括平时作业，研讨报告等。重点支持毕业要求指标点 1），2），3）。

期末成绩占 80%，采用闭卷考核方式。题型为填空题、判断题、简答题、证明题、计算题等。重点支持毕业要求指标点 1），2），3）。

六、教材和参考资料

教材：

1. A.G.Hamilton.数理逻辑（影印版+中文版）.清华大学出版社，2002.
2. 石纯一. 数理逻辑与集合论.清华大学出版社，2003

参考资料：

1. Karel Hrbacek. Introduction to Set theory（Third）. Marcel Dekker, 1999.
2. 汪芳庭. 公理集论. 中国科技大学出版社, 1995.

七、其它