

## EXERCISE THREE

12/19 课堂交。	注(***)部分是选做。
------------	--------------

1. (指数映射)定义 $n$ 阶矩阵的指数映射 $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} A^i / i!$ .
  - (a) 计算 $e^A$ :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - (b) 验证 $e^{sA} * e^{tA} = e^{(s+t)A}$ , 其中 $s, t$ 是任意实数。
  - (c) 设任一左不变向量场 $X$ 决定的过单位阵 $I$ , 切向量为 $A$ 的矩阵曲线为 $r(t)$ , 满足方程  $r'(t) = X(r(t))$ 。验证 $r(t) = e^{tA}$ 为方程的解。  
注:  $X(r(t)) = r(t)A$ , 一般的 $X(B) = BX(I) = BA$ . 验证其为左不变向量场的一般形式。
  - (d) \*\*\* 证明:  $r(t)$ 是 $GL(n)$ 的一个子群。(称为单参数子群).
  
2. (常见曲面)参考一般旋转曲面的计算;
  - (a) 计算出环面的测地线方程, 说明经线和纬线是否是测地线, 还有其他形式的测地线吗?
  - (b) 螺旋面为 $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$ 其中 $0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$ . 计算其测地线方程, 说明经线和纬线是否是测地线, 还有其他形式的测地线吗? 给出螺旋面的几何意义。
  
3. (特殊曲面)
  - (a) 圆柱面:  $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , 其中 $0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$ , 计算其所有测地线。  
说明: 存在两点可用无穷多条测地线连接。
  - (b) (教材练习4.2.1) 计算Poincare圆盘中的所有测地线。
  
4. (微分算子)
  - (a) (教材练习4.4.1) Green公式。
  - (b) (教材练习4.4.4)
  - (c) \*\*\* (教材练习4.4.6) Hessian.

5. (Gauss曲率)
- (教材练习5.2.1)
  - 计算环面的Gauss曲率;
  - 计算螺旋面(习题二)的Gauss曲率;
6. (紧李群)  $SO(3)$ 是 $3 \times 3$ 维行列式为1的正交矩阵;
- 其李代数即单位元的切空间是 $so(3) = \{A + A^T = 0\}$ ,即反对称的3阶矩阵(注: 维数为3). 说明矩阵 $P, Q, R$ 为一组基。其中矩阵的非零元为 $P_{12} = -P_{21} = -1, Q_{13} = -Q_{31} = -1, R_{23} = -R_{32} = -1$ 。
  - 已知 $[X, Y] = XY - YX$ (乘法为矩阵乘法), 计算李群的结构常数,
  - 利用紧李群满足 $\nabla_X Y = [X, Y]/2$  (例5.2.1), 计算三个截面曲率,
  - 计算Ricci曲率和数量曲率。
  - \*\*\*给出曲率算子 $R_{ijk}^s$ .
7. (高维流形)
- (教材练习5.3.1)
  - 计算双曲空间 $H^n$ 的截面曲率,Ricci曲率和数量曲率。  

$$ds^2 = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2).$$
8. (\*\*张量和活动标架)
- 说明: 联络,  $\text{div}$ 不是张量; 行列式可以看成是一个 $n$ 维空间上的张量。
  - 证明: 教材练习5.5.1;
  - 计算: 教材练习5.5.3;